## 4. SISTEME FUZZY

### 4.1. Introducere

In anii ‘90 a devenit evident ca expertii umani, care rationeaza aproape exclusiv cu variabile lingvistice si cu o logica aproximativa si vaga, obtin - in multe cazuri - rezultate mai rapide si mai corecte decat calculatoarele (care folosesc o logica binara Booleana, cu 2 valori: 0 si 1; perechea {0, 1} poate utiliza termeni ca {nu, da}, {inchis, deschis}, {jos, sus}). Multimile fuzzy contin elemente care au un anumit grad de nedeterminare , iar rationamentele facute pe baza lor au un grad de imprecizie. Se poate spune ca multimile fuzzy nu au granite bine definite (fuzzy = imprecis, vag).

Teoria probabilitatii ( bazata pe statistica, adica pe posibilitatea de a repeta un eveniment de oricate ori dorim ) **nu poate** modela aceste imprecizii, care se refera la evenimente unice. De exemplu, nu este corecta exprimarea “probabilitatea de rupere “ a unei bare, reprezentand o extrapolare de la multimea de bare identice la o bara unica. Mai precis este sa spunem “posibilitatea de rupere” la o anumita solicitare.

Alte situatii in care teoria probabilitatii este irelevanta: clasificarea unor numere dintr-un sir monoton in “mici“ si “mari “, clasificarea unor opere de arta intr-o categorie bazata pe valoare, etc.

Diferenta dintre teoria multimilor fuzzy si teoria probabilitatii se poate usor vedea in *problema omletei* [1]: consideram propozitia “ Hans mananca X oua “, cu X luand valori in U = {1, 2, 3,…}. Putem asocia o **distributie de posibilitate** lui X , interpretand $\Pi_x(u)$ ca fiind “gradul usurintii cu care Hans poate manca u oua”. Putem , de asemenea , asocia o **distributie de probabilitate** lui X , interpretand $P_x(u)$ ca probabilitatea de a manca u oua . Cu alte cuvinte, unei **variabile lingvistice** ( = “ usurinta de a manca oua“ ) i se poate asocia - printr-o anumita procedura - o densitate de posibilitate , la fel cum unei variabile aleatoare ( = “ u oua mancate “ ) i se poate atasa o densitate de probabilitate . $\Pi_x(u)$ si $P_x(u)$ pot avea valorile din tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

| u | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pi_x(u)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 |
| $P_x(u)$ | 0.1 | 0.8 | 0.1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Se observa ca un inalt grad de posibilitate ( Hans mananca 3 oua ) nu implica un grad mare de probabilitate . Din tabelul 2 deducem ca nu este necesar ca distributia de posibilitate sa satisfaca proprietatea ca suma tuturor posibilitatilor sa fie egala cu 1 , ca in cazul sumei probabilitatilor.

Gradul de posibilitate reprezinta imprecizia unui eveniment, in timp ce probabilitatea arata frecventa de aparitie a unui eveniment.

Rationamentele facute de fiintele inteligente presupune stabilirea universului U al elementelor supuse analizei, iar rezultatul obtinut are valoare doar prin raportarea la respectivele elemente. De exemplu, afirmatia “un rinocer matur de 1,5 tone este *usor*” este adevarata, avand in vedere ca greutatea medie a rinocerilor este de 2 t. Daca rinocerul de 1,5 t. se compara cu un bivol de 1 t., arunci nu se mai poate face aceeasi afirmatie. U se numeste “universul de discurs”.

Pentru o multime crisp (precisa) C, definita pe universul U, se poate defini o functie caracteristica $\mu_C : U \rightarrow \{0, 1\}$ daca si numai daca

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 \; daca \;\; x \in C \\ 0 \; daca \;\; x \notin C \end{cases} \qquad (4.1)$$

Acum putem redefini operatiile din teoria multimilor crisp :

- complementul lui C, notat cu C’: $\mu_{C'}(x) = 1 - \mu_C(x)$ ;
- intersectia $A \cap B$ : $\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ ;
- uniunea $A \cup B$ : $\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ ; (4.2)
- egalitatea $A = B$ : $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ .

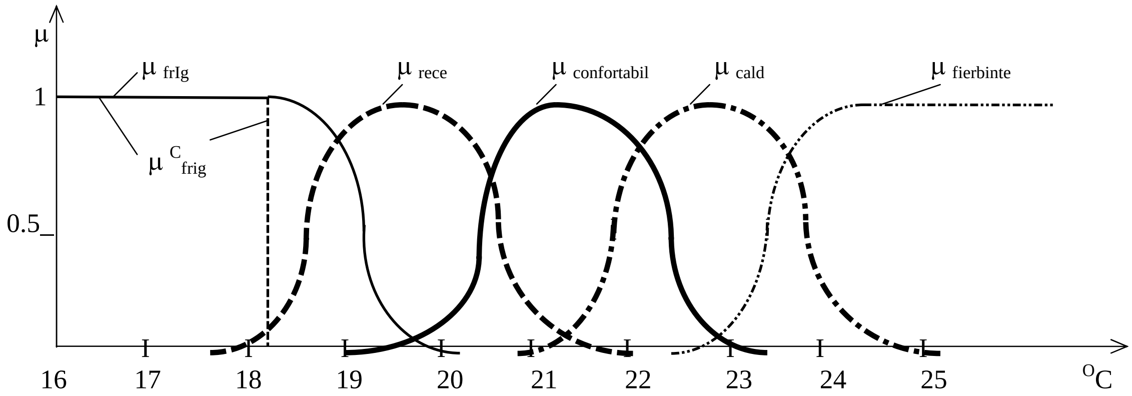
La o multime fuzzy F, functia caracteristica este generalizata la o **functie de apartenenta**, care atribue fiecarui $u \in U$ o valoare in <u>intervalul unitar</u> [0, 1], in loc de multimea cu doua elemente {0, 1}: $\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$. (4.3)

Fiecare element u din U are un *grad de apartenenta ( fuzzy )* $\mu_F(u) \in [0, 1]$.

Multimea fuzzy F este complet determinata prin : $F = \{ u \mid \mu_F(u), u \in U \}$, (4.4)

Exemplu: Consideram un cerc de raza R si o multime de bete subtiri de lungime $\ell > 2R$. Lasam sa cada aceste bete in zona ocupata de cerc. Unele bete vor cadea in cerc, altele in afara, iar altele il vor intersecta. Peste universul format de multimea betelor definim multimea fuzzy F a “betelor aflate in interiorul cercului”. Betele aflate in exterior vor avea apartenenta *zero* la aceasta multime, iar cele complet in interior au apartenenta *unu*. Daca un bat are in interior o parte a sa de lungime $\ell'$, apartenenta lui la multimea F se poate calcula cu formula: $\mu_F = \ell' / \ell$.

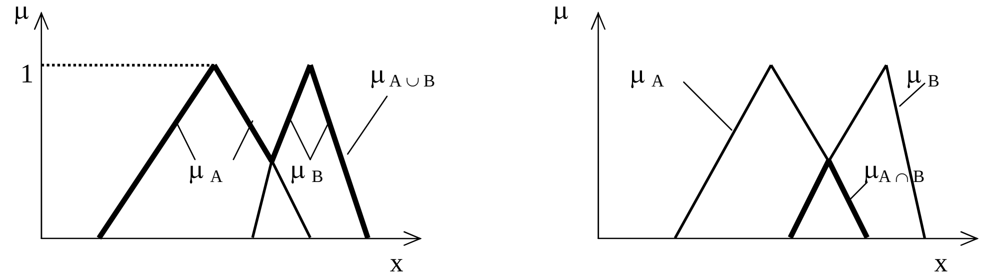
In figura 4.1 se da un exemplu de cinci multimi fuzzy intalnite la un aparat de aer conditionat ; $\mu^C_{frig}$ reprezinta - spre comparatie - multimea crisp a valorilor de temperatura corespunzatoare starii “ frig “ .




F i g . 4.1

4.2. Operatii cu multimi fuzzy

Operatiile din relatiile (4.2) sunt valabile si aici, cele principale fiind reprezentate in figura 4.2.




a ) b )

Fig. 4.2

In [1], preluat din Zadeh, se propune o notatie mai convenabila pentru multimile fuzzy . Considerand ca C este o multime crisp finita $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, atunci o notatie alternativa este:

$$C = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \qquad (4.5)$$

unde “ + “ reprezinta o <u>enumerare</u> (inseamna “ si “).

Mai departe, o notatie alternativa pentru $(u, \mu(u))$, din (4.4), este $\mu(u) / u$, unde “ / “ denota un *dublet* si este numit “ separator “. De exemplu $0.9 / x_3$ inseamna ca $\mu(x_3) = 0.9$.

Multimea din relatia (4.4) poate fi descrisa astfel:

$$F = \mu_F(u_1) / u_1 + \dots + \mu_F(u_n) / u_n = \sum \mu_F(u_i) / u_i, \qquad (4.6)$$

unde operatorul “ + “ satisface relatia : $a / u + b / u = \max(a, b) / u$, (4.7)

adica daca acelasi element are doua grade de apartenenta 0.8 si 0.6 atunci gradul sau de apartenenta devine 0.8.

Multimea crisp din (4.5) poate fi privita ca o multime fuzzy: $C = \sum_{i=1}^{n} 1 / u_i$ . (4.8)

O **relatie fuzzy** reprezinta o multime de “multipleti”, in care un multiplet este o pereche ordonata. Un multiplet binar (dublet) este notat (x, y), iar un multiplet (n - uplu): $(x_1, \dots, x_n)$.
Exemplu: o relatie ternara in $\mathbf{N}^3$ este $\{(p, q, r) \mid p^2 + q^2 = r^2\}$, care contine toti tripletii (p, q, r) reprezentand laturile unui triunghi dreptunghic . Aceasta relatie contine elementele (3, 4, 5), (5, 12, 13), etc.
In cazul multimilor crisp, relatiile sunt introduse prin **functia caracteristica**. Considerand ca R este o relatie n - ara definita pe $X_1 \times \dots \times X_n$ , atunci $\mu_R : X_1 \times \dots \times X_n \to \{0, 1\}$ este “functia caracteristica“ a multimii A daca si numai daca pentru toti $x_1, \dots, x_n$ ,

$$\mu_R(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 \text{ daca } (x_1,\dots,x_n) \in R \\ 0 \text{ daca } (x_1,\dots x_n) \notin R \end{cases} \qquad (4.9)$$

Intr-o relatie fuzzy functia caracteristica este **extinsa pe tot intervalul** [0, 1]. O RELATIE FUZZY este o *multime fuzzy de multipleti*, adica fiecare multiplet are un grad de apartenenta cuprins intre 0 si 1; definitia este: “ Fie U si V universuri masurabile (discrete) si $\mu_R : U \times V \to [0, 1]$, atunci

$$R = \sum_{U x V} \mu_R(u,v)/(u,v) \qquad (4.10)$$

este o relatie fuzzy binara pe U x V“.
Exemplu. Daca U = {1, 2, 3}, atunci “aproximativ egal ” este o relatie fuzzy binara:

$$1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3) + 0.8/(1,2) + 0.8/(2,3) + 0.8/(2,1) + 0.8/(3,2) + 0.3/(1,3) + 0.3/(3,1) . \qquad (4.11)$$

Functia de apartenenta a acestei relatii poate fi descrisa astfel :

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ daca } x = y \\ 0{,}8 \text{ daca } |x-y| = 1 \\ 0{,}3 \text{ daca } |x-y| = 2 \end{cases} \qquad (4.12)$$

Aceasta functie se poate reprezenta in notatie matriciala, prin tabloul:

| | | Y 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0.8 | 0.3 |
| X | **2** | 0.8 | 1 | 0.8 |
| | 3 | 0.3 | 0.8 | 1 |

(4.13)

Definim acum doua relatii binare R si S , pe care le vom utiliza in continuare.

R = “ x este mult mai mare decat y “ :

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | .8 | 1. | .1 | .7 |
| $x_2$ | 0 | .8 | 0 | 0 |
| $x_3$ | .9 | 1. | .7 | .8 |

(4.14)

S = “ y este foarte apropiat de x “:

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | .4 | 0 | .9 | .6 |
| $x_2$ | .9 | .4 | .5 | .7 |
| $x_3$ | .3 | 0 | .8 | .5 |

(4.15)

Pe relatiile fuzzy se definesc operatiile **intersectie** si **reuniune :**
**“**Fie relatiile binare R si S definite pe X x Y . Intersectia lui R si S :

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \quad \mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \qquad (4.16)$$

Reuniunea lui R si S:

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \quad \mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \text{“} \qquad (4.17)$$

*Reuniunea* relatiilor (4.14) si (4.15), care inseamna “x este mult mai mare decat y **sau** y este foarte apropiat de x“, este data de relatia:

$R \cup S =$

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | .8 | 1 | .9 | .7 |
| $x_2$ | .9 | .8 | .5 | .7 |
| $x_3$ | .9 | 1 | .8 | .8 |

(4.18)

Tabloul din (4.18) se obtine suprapunand tablourile din (4.14) si (4.15), iar in fiecare casuta se pune elementul maxim.

Doua operatii foarte importante pe multimile si relatiile fuzzy sunt **proiectia** si **extensia cilindrica** . Operatia de **proiectie** comprima o relatie ternara intr-o relatie binara, sau o relatie binara intr-o multime fuzzy, sau o multime fuzzy intr-o valoare crisp unica. Consideram relatia R data in (4.14); proiectia pe X inseamna: $x_1$ ia valoarea celui mai mare grad de apartenenta din dubletii ($x_1$, $y_1$), ($x_1$, $y_2$), ($x_1$, $y_3$) si ($x_1$, $y_4$), adica 1 (maximul de pe prima linie); $x_2$ este maximul de pe a doua linie, adica .8; $x_3$ este 1. Astfel se obtine multimea fuzzy:

$$\text{Proiectia lui R pe } X = 1 / x_1 + .8 / x_2 + 1 / x_3 \qquad (4.19)$$

In acelasi mod, proiectia pe Y se face luand valorile maxime din cele patru coloane, rezultand multimea fuzzy: proiectia lui R pe $Y = .9 / y_1 + 1 / y_2 + .7 / y_3 + .8 / y_4$ . (4.20)

**Extensia cilindrica** este operatia opusa proiectiei. Ea extinde o multime fuzzy la o relatie binara fuzzy, o relatie binara la o relatie ternara, etc. Aceasta operatie are urmatorul scop: fie A o multime fuzzy definita pe X si fie R o relatie fuzzy definita pe X x Y, atunci se observa ca este imposibil sa se faca intersectia lui A cu R; daca insa A este extinsa pe X x Y, intersectia este posibila. Consideram multimea fuzzy din relatia (4.19), notata cu A; extensia sa cilindrica pe domeniul X x Y este:

ec(A)=

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $x_2$ | .8 | .8 | .8 | .8 |
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

(4.21’)

Extensia cilindrica pe X x Y a multimii fuzzy din relatia (4.20), notata cu B, este:

ec(B)=

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | .9 | 1 | .7 | .8 |
| $x_2$ | .9 | 1 | .7 | .8 |
| $x_3$ | .9 | 1 | .7 | .8 |

(4.21”)

Urmatorul exemplu arata folosirea operatiei de extensie cilindrica pentru intersectia relatiilor si multimilor fuzzy.

Exemplu. Consideram din nou relatia R, exprimata prin “x este aproximativ egal cu y“, cu notatia matriciala din (4.13) si presupunem ca “x este mic“, exprimat prin multimea fuzzy:

$$A = 0.3 / x_1 + 1. / x_2 + 0.8 / x_3 . \qquad (4.22)$$

Combinarea relatiei fuzzy R cu multimea fuzzy A, exprimata prin “x este aproximativ egal cu y **si** x este mic“, se face prin **intersectia** relatiei R cu extensia lui A. Extensia lui A pe X x Y este:

ec(A)=

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | .3 | .3 | .3 |
| $x_2$ | 1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | .8 | .8 | .8 |

(4.23)

Intersectia lui R cu ec (A):

|  |  | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |  |
|---|---|---|---|---|---|
| $R \cap ec(A)=$ | $x_1$ | .3 | .3 | .3 |  |
|  | $x_2$ | .8 | 1 | .8 | (4.24) |
|  | $x_3$ | .3 | .8 | .8 |  |

Tabloul din (4.24) se obtine suprapunand tablourile din (4.13) si (4.23), iar in fiecare casuta se pune elementul minim.
Combinarea relatiilor si multimilor fuzzy cu ajutorul proiectiei si extensiei cilindrice se numeste **compunere** si se noteaza cu simbolul "o" (= compus).
Definitie . Fie A o multime fuzzy definita pe X si R o relatie fuzzy definita pe X x Y. Atunci din compunerea lui A cu R rezulta o multime fuzzy B definita pe Y:

$$B = A \text{ o } R = pr_{\text{pe } Y} ( ec ( A ) \cap R ) \qquad (4.25)$$

sau, pentru ca intersectia se realizeaza cu operatia de minimum, iar proiectia - cu maximum:

$$\mu_B(y) = \max_x \min\left( \mu_A(x), \mu_R(x,y) \right) \qquad (4.26)$$

Aceasta este numita **relatia de compozitie max - min**.
Consideram doua relatii R si S, R fiind definita pe X x Y, iar S pe Y x Z. Nu este posibil sa se faca intersectia lui R cu S, pentru ca ele sunt definite pe domenii diferite. In acest caz, se extind ambele relatii pe X x Y x Z, dupa care intersectia se poate realiza. Intersectia se va proiecta pe X x Z: $R \text{ o } S = pr_{\text{pe } X \times Z} (ec ( R ) \cap ec ( S ))$ (4.27)
Exemplu. Consideram relatiile R si S din (4.14) si (4.15), unde R este definita pe X x Y, dar admitem ca S este definita pe Z x Y. Deci S exprima ca "y este foarte apropiat de z". In forma tabelara (se observa ca S este transpus):

|  | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | .8 | 1. | .1 | .7 |
| $x_2$ | 0 | .8 | 0 | 0 |
| $x_3$ | .9 | 1. | .7 | .8 |

$\cap$

|  | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | .4 | .9 | .3 |
| $y_2$ | 0 | .4 | 0 |
| $y_3$ | .9 | .5 | .8 |
| $y_4$ | .6 | .7 | .5 |

(4 .28)

Acum extindem ambele relatii pe X x Y x Z (ne imaginam doua paralelipipede formate din cuburi mici) si facem intersectia lor, relatia rezultata fiind proiectata pe X x Z:

|  | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | .6 | .8 | .5 |
| $x_2$ | 0 | .4 | 0 |
| $x_3$ | .7 | .9 | .7 |

(4.29)

La acelasi rezultat se ajunge daca se considera tablourile din (4.28) ca matrici carora li se face produsul, dar in locul inmultirii elementelor respective (linie cu coloana) se ia elementul minim - conform relatiei (4.20) - iar in locul sumei produselor elementelor se ia maximul, conform relatiei (4.7). De exemplu , elementul din linia 1 si coloana 2 din (4.29): 0.8 = max {min (0.8; 0.9), min (1; 0.4), min (0.1; 0.5), min (0.7; 0.7)} = max {0.8; 0.4; 0.1; 0.7} (4.30)
Enuntul de mai sus reprezinta **regula practica de efectuare a relatiei de compozitie max - min** .

## 4.3. Metoda ecuatiei liniare fuzzy

Una dintre metodele de clasificare bazate pe sistemele fuzzy, utilizate pentru monitorizarea proceselor de prelucrare mecanica este **metoda ecuatiei liniare fuzzy**. Aceasta considera ca relatia dintre clase (conditiile de prelucrare) si indicii de monitorizare se poate exprima prin[2]:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q} \text{ o } \mathbf{p} \, , \qquad (4.31)$$

unde **r** reprezinta gradele fuzzy pentru indicii de monitorizare, **p** reprezinta gradele fuzzy pentru

clase, **Q** este o functie de apartenenta fuzzy, iar simbolul “o“ este operatorul fuzzy de compunere (4.25).
Rescriem ecuatia (4.31) in forma matriciala:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & . & . & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & . & . & q_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ q_{m1} & q_{m2} & . & . & q_{mn} \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ p_n \end{bmatrix}, \qquad (4.32)$$

unde $q_{ij}$ este relatia fuzzy dintre indicele de monitorizare i si clasa j.
In <u>*faza de invatare*</u> se determina doi parametri numiti in [2] “frecventa de aparitie“ si “rezistenta suportului“. Notam cu $S_i = \{x(1, i), x(2, i), \ldots, x(N, i)\}$, multimea care contine indicele de monitorizare i din toate inregistrarile. Elementul maxim din $S_i$ il notam cu $x_{i,max}$, iar pe cel minim - $x_{i,min}$. Divizam intervalul dintre $x_{i,max}$ si $x_{i,min}$ in L subintervale egale (se recomanda L = N / 10 ÷ N / 15, astfel ca sa fie suficiente inregistrari in fiecare interval):

$$\Delta x = (x_{i,max} - x_{i,min}) / L \qquad (4.33)$$

Subintervalul k este: $v_{i,k} = [x_{i,min} + (k - 1)\Delta x,\ x_{i,min} + k . \Delta x]$, ( k = 1 , 2 , … , L ). (4.34)
Relatia fuzzy se poate reprezenta printr-o multime cu L elemente, analog cu (4.4):

$$q_{i,j} = \{ v(i, k) \mid q(i, j, k), (k = 1, 2, \ldots, L) , \qquad (4.35)$$

in care **gradul fuzzy** q (i, j, k) este determinat de doi parametri:
-frecventa de aparitie f (i, j, k) = $C_{ijk} / C_{ik}$ ;
- rezistenta suportului s (i, j, k) = $C_{ijk} / C_{ij}$ , (4.36)
unde $C_{ijk}$ este numarul inregistrarilor din $S_i$ care apartin clasei j si sunt in subintervalul k, $C_{ik}$ este numarul inregistrarilor din $S_i$ care sunt in sub-intervalul k, iar $C_{ij}$ - numarul inregistrarilor din $S_i$ care apartin clasei j. Gradul fuzzy q (i, j, k) rezulta din combinarea lui f (i, j, k) si s(i, j, k):

$$q(i, j, k) = \alpha . f(i, j, k) + (1 - \alpha) .s(i, j, k), \qquad (4.37)$$

unde $0 \le \alpha \le 1$ este o constanta .

BIBLIOGRAFIE

1. **D. Driankov , s.a. ,** “ *An Introduction to Fuzzy Control* “ , Springer - Verlag , 1993 .
2. **R. Du, M.A. Elbestawi, S.M. Wu** *“Automated Monitoring of Manufacturing Processes, Part 1: Monitoring Methods, Part 2: Applications”*, in ASME Journal of Engineering for Industry, may 1995,vol. 117, Part 1-pag. 121, Part 2 – pag.133.
3. **K. Hirota ( editor ) “** *Industrial Applications of Fuzzy Technology*“ , Springer - Verlag , Tokyo , 1993 .
4. **J. Kahlert “** *Fuzzy Control fur Ingenieure* “, Vieweg , Braunschweig , 1995 .
5. **B. Kosko** *“Neural Networks and Fuzzy Systems“*, Prentice Hall 1992, Englewood Cliff N.Y.
6. **R. J. Marks II ( editor )** “ *Fuzzy Logic Technology and Applications* “, I E E E Technical Activities Board , New - York , 1994 ,
7. **H. N. Teodorescu** *“Sisteme fuzzy si aplicatii”* , vol. I , Institutul Politehnic Iasi , 1989 .
8. **T. Terano , s.a.** “ *Applied Fuzzy Systems* “, Academic Press Profesional , 1994 .