2- RECUNOASTEREA FORMELOR

Se numeste "vector de forma" (sau – pe scurt – "forma") setul de masuratori indirecte cu ajutorul caruia este descris sau caracterizat un obiect. Fiecare caracteristica poate fi privita ca o variabila intr-un spatiu *m* – dimensional, numit spatiu al formelor, unde fiecare caracteristica este atribuita unei dimensiuni.

Vectorul de forma: $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^T$, unde x_i este caracteristica *i*.

Prin *recunoasterea formelor* se intelege acel ansamblu de metode si tehnici cu ajutorul caruia se poate realiza o clasificare in cadrul unei multimi de obiecte (de ex.: sfere cuburi, prisme, etc.), procese sau fenomene. Aceasta se realizeaza prin **compararea cu modele.** In memoria calculatorului se stocheaza un set de modele (prototipuri), cate unul pentru fiecare clasa. Forma de intrare necunoscuta (neclasificata inca; de ex.: un cub cu colturile rotunjite) este comparata pe rand cu fiecare prototip, clasificarea ei intr-una din clase facandu-se pe baza unui criteriu de selectie: daca forma necunoscuta se potriveste cel mai bine cu modelul “i", atunci ea va apartine clasei “i". Dificultatile care apar sunt legate de alegerea unui model reprezentativ, care sa caracterizeze cat mai bine o clasa de forme, cat si definirea unui criteriu de selectie adecvat, capabil sa clasifice univoc fiecare forma necunocuta. In plus, se face ipoteza ca obiectele simlare – si anume, similare in raport cu o anumita proprietate – se grupeaza impreuna, formand domenii distincte.

Fiecare **forma** apare ca un punct in *spatiul formelor* . Acest spatiu – notat cu H_x – poate fi descris de matricea indicilor $x(i, j)$:

$$H_x = [\, x(i, j)\ ;\ i = 1, 2, ..., N\ ;\ j = 1, 2, ..., m \,] = [\, \boldsymbol{x}_k^T\ ;\ k = 1, 2, ..., N \,]\ , \qquad (2.1)$$

unde N este numarul de forme.

Conceptul de *clasificare a formelor* poate fi inteles ca o partitionare a spstiului formelor in domenii reciproc exclusive, fiecare domeniu apartinand unei clase. :

$$\boldsymbol{h}_1 \cup \boldsymbol{h}_2 \cup ... \cup \boldsymbol{h}_n = H_x\ ;\quad \boldsymbol{h}_1 \cap \boldsymbol{h}_2 \cap ... \cap \boldsymbol{h}_n = F\ , \qquad (2.2)$$

unde cu F s-a notat multimea punctelor care constituie frontierele intre clase.

Din punct de vedere matematic acest gen de problema de clasificare poate fi definita sub forma unei **functii discriminant** $D_j(\boldsymbol{x})$ asociata clasei de forme $\boldsymbol{h}_j$, ($j = 1, 2, ..., n$) , cu proprietatea ca daca forma reprezentata prin vectorul $\boldsymbol{x}$ face parte din h_i , fapt care il vom simboliza $\boldsymbol{x} \in h_i$ **,** cu *i* fixat, atunci valoare lui $D_i(\boldsymbol{x})$ trebuie sa fie cea mai mare; adica pentru toti $\mathbf{x} \in \mathrm{h}_i$ va fi indeplinita conditia:

$$D_i(\boldsymbol{x}) > D_j(\boldsymbol{x})\ ;\quad i, j = 1, 2, ..., n\ ;\quad i \neq j\ . \qquad (2.3)$$

De exemplu: *Sferele* sunt corpurile care – la acelasi volum – au suprafata cea mai mica.

Frontierele dintre clase, denumite si "limite de decizie", pot fi exprimate cu relatia:

$$F = D_i(\boldsymbol{x}) - D_j(\boldsymbol{x})\ ;\quad i, j = 1, 2, ..., n\ ;\ i \neq j\ . \qquad (2.4)$$

Functiile discriminant (sau **clasificatorii**) se pot imparti in doua categorii: neparametrice si parametrice. Daca formele din setul de formare nu pot fi descrise prin masuratori statistice, atunci se utilizeaza functii discriminant "neparametrice", dintre care cei mai folositi sunt **clasifcatorii decizionali – teoretici**. Clasificatorii "parametrici" se bazeaza pe estimarea parametrilor statistici ai formelor din setul de formare, aceste estimari fiind apoi utilizate pentru stabilirea functiilor discriminant.

2.1.- CASIFICATORII DECIZIONALI – TEORETICI (sau "cu distributii libere")

2.1.1.- Clasificatorul liniar

Intr-un spatiu bidimensional $\boldsymbol{x} = [\, x_1, x_2 \,]^T$ acest clasificator este o functie liniara (un plan perpendicular pe planul formelor): $w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = 0$, (2.5)

analog cu $f = A\,x + B\,y + C = 0$, cu reprezentarea din figura 2.1 (pentru $C < 0$).

Intr-un spatiu m-dimensional functia este un hiperplan :

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_m x_m + w_{m+1} = 0\ . \qquad (2.6)$$

In acest caz functia discriminant se ia de forma:

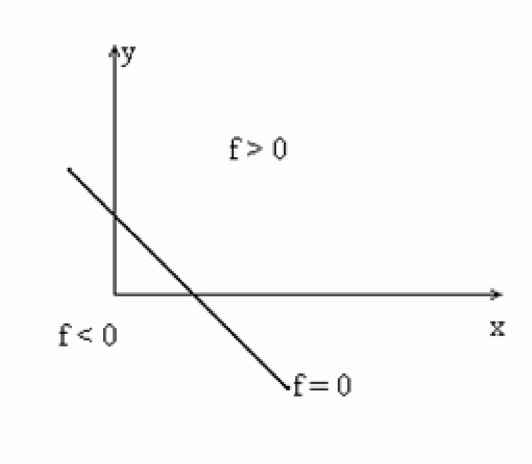

Fig. 2.1

$$D_i(x) = \sum_{k=1}^{m} w_{i,k} x_k + w_{i,m+1} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.7}$$

care se poate scrie matricial, pentru cele n clase de forme: $D(x) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{X}$, (2.8)
unde

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} w_{1,1} & .. & .. & w_{1,m+1} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ w_{n,1} & .. & .. & w_{n,m+1} \end{vmatrix} \qquad \text{si} \qquad \mathbf{X} = \begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_m \\ 1 \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

La vectorul $\boldsymbol{x}$ s-a introdus suplimentar elementul 1, devenind vectorul $\mathbf{X}$, pentru a da posibilitatea efectuarii operatiei de inmultire.

2.1.2.- Clasificatorul de distanta minima

Acesta se bazeaza pe evaluarea distantelor dintre forma ce trebuie clasificata si un set de vectori de referinta din spatiul formelor. Daca vom presupune ca sunt cunoscuti n vectori de referinta, notati cu $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, cu $\boldsymbol{R}_j$ asociat clasei h_j, atunci clasificatorul de distanta minima va atribui forma $\boldsymbol{x}$ clasei h_i daca distanta dintre aceasta si vectorul de referinta asociat este minima: $\boldsymbol{x} \in h_i$ daca $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}_i) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_i| = \min_j |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_j|$. (2.10)

Vectorii de referinta ii consideram ca reprezentand centrele claselor si ii calculam cu relatia:

$$\boldsymbol{R}_j = \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} \boldsymbol{x}_i^{(j)} \ , \tag{2.11}$$

unde M_j este numarul de forme din clasa h_j (fig. 2.2).
Distanta dintre forma $\boldsymbol{x}$ si vectorul $\boldsymbol{R}_i$ al clasei h_i este [4]:

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_i|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_i)^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_i) \ , \tag{2.12}$$

superscriptul T desemnand operatia de transpunere a unei matrici.
Verificam relatia anterioara pentru $m = 2$ (adica – in plan): $\boldsymbol{x} = [x_1, y_1]^T$; $\boldsymbol{R} = [x_2, y_2]^T$;

$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}|^2 = [x_1 - x_2 \quad y_1 - y_2] \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, regasindu-se formula distantei dintre doua puncte.

Din relatiile (2.10) si (2.12) rezulta:

$$d^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}_i) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{R}_i|^2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{R}_i \tag{2.13}$$

Deoarece produsul $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$ este acelasi pentru toate clasele, el poate fi eliminat si putem schimba si semnul, fara a se modifica suprafata de decizie, obtinandu-se functia discriminant pentru un clasificator de distanta minima:

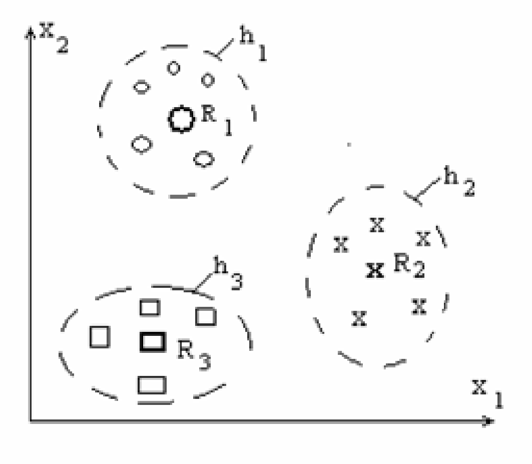

Fig. 2.2

$$D_i(x) = x^T R_i + R_i^T x - R_i^T R_i\,, \qquad i = 1, 2, ..., n\,. \qquad (2.14)$$

Se observa ca $D_i(x)$ este linara, iar distanta este minima cand D_i este maxima.

2.1.3.- Clasificatorul liniar pe portiuni

Definim distanta dintre o forma necunoscuta x si clasa h_i ca cea mai mica distanta dintre x si fiecare vector $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, ..., M_i$ din h_i:

$$d(x, h_i) = \min_{j=1,2,...,M_i} \{ d(x, x_j^{(i)}) \} = \min_{j=1,2,...,M_i} \{ |x - x_j^{(i)}| \}\,. \qquad (2.15)$$

Daca distanta este definita conform relatiei (2.12), atunci functia de decizie se scrie analog cu (2.14):

$$D_i(x) = \max_{j=1,2,...,M_i} \{ x^T x_j^{(i)} + (x_j^{(i)})^T x - (x_j^{(i)})^T x_j^{(i)} \}\,, \quad i = 1, 2, ..., n\,. \quad (2.16)$$

Daca notam expresia dintre acolade cu $D_i^{(j)}(x)$, atunci (2.16) se scrie:

$$D_i(x) = \max_{j=1,2,...,M_i} \{ D_i^{(j)} \}\,, \quad i = 1, 2, ..., n\,. \qquad (2.17)$$

Deoarece $D_i^{(j)}(x)$, este o functie liniara, acest clasificator se numeste <u>liniar pe portiuni</u>.

Un exemplu de suprafata de decizie obtinuta in acest caz, este prezentat in figura 2.3.

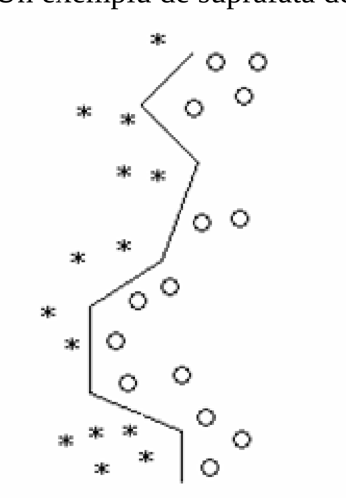

Fig. 2.3

2.1.4.- Clasificatori neliniari (polinomiali)

Acesti clasificatori au expresia :

$$D_i(x) = \sum_{k=1}^{L} w_{i,k} f_k(x) + w_{i,L+1}\,, \qquad (2.18)$$

unde $f_k(x) = x_{k1}^{n1} \cdot x_{k2}^{n2} \ldots x_{kr}^{nr}$, cu $k1, k2, ..., kr = 1, ..., m$

si $n1, n2, ..., nr = 0$ sau 1.

Pentru $r = 2$ rezulta functia discriminant patratica, cu

$f_k(x) = x_{k1}^{n1} \cdot x_{k2}^{n2}$, pentru $k1, k2 = 1, ..., m$; $n1, n2 = 0$ sau 1.

Functiile discriminant de tipul 2.1.1 si 2.1.4 sunt reprezentate in figura 2.4, in cazul unui spatiu bidimensional (spatiul formelor este un plan).

BIBLIOGRAFIE

1. A. Faure "Perception et reconaissance des formes", ediTESTS, 1985
2. I. Fomin, G. Tarlovski "Statisticeskaia teoria raspoznavania obrazov" Moskva, "Radio I sviazi", 1986
3. V. Neagoe, O. Stanasila "Teoria recunoasterii formelor", Editura Academiei, 1992
4. R. Vancea, s. A. "Recunoasterea formelor. Aplicatii", Editura Academiei, 1989.

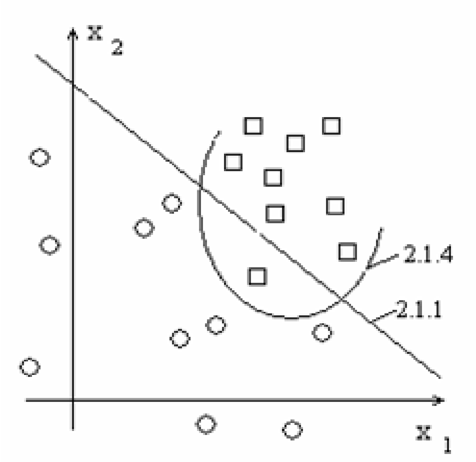

Fig. 2.4